

ELEMENTI DI INFORMATICA TEORICA

Parte 1: Logica Matematica

1.4 Sistemi deduttivi della logica proposizionale

Giovanni Amendola

Corso di laurea triennale in Informatica
Università della Calabria

16 marzo 2022

Anno Accademico 2021/2022

Sostituzione uniforme

Sostituzione uniforme

Indichiamo con $\phi[p]$ una proposizione che può contenere delle occorrenze del simbolo atomico p .

Sostituzione uniforme

Indichiamo con $\phi[p]$ una proposizione che può contenere delle occorrenze del simbolo atomico p .

Definizione: Sostituzione uniforme

Sia ψ una proposizione. Con la notazione $\phi[\psi/p]$ indicheremo la formula $\phi[\psi]$ in cui tutte le occorrenze di p sono state uniformemente e simultaneamente sostituite con occorrenze di ψ . Questa operazione è detta *sostituzione uniforme*.

Sostituzione uniforme

Indichiamo con $\phi[p]$ una proposizione che può contenere delle occorrenze del simbolo atomico p .

Definizione: Sostituzione uniforme

Sia ψ una proposizione. Con la notazione $\phi[\psi/p]$ indicheremo la formula $\phi[\psi]$ in cui tutte le occorrenze di p sono state uniformemente e simultaneamente sostituite con occorrenze di ψ . Questa operazione è detta *sostituzione uniforme*.

Esempio

Si consideri $\psi = (A \rightarrow B)$, $\theta = (\neg A \vee B)$ e $\phi[p] = (p \rightarrow (C \vee D))$. Allora

$$\phi[\psi/p] = ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee D)) \text{ e } \phi[\theta/p] = ((\neg A \vee B) \rightarrow (C \vee D)).$$

Sostituzione uniforme

Indichiamo con $\phi[p]$ una proposizione che può contenere delle occorrenze del simbolo atomico p .

Definizione: Sostituzione uniforme

Sia ψ una proposizione. Con la notazione $\phi[\psi/p]$ indicheremo la formula $\phi[\psi]$ in cui tutte le occorrenze di p sono state uniformemente e simultaneamente sostituite con occorrenze di ψ . Questa operazione è detta *sostituzione uniforme*.

Esempio

Si consideri $\psi = (A \rightarrow B)$, $\theta = (\neg A \vee B)$ e $\phi[p] = (p \rightarrow (C \vee D))$. Allora

$$\phi[\psi/p] = ((A \rightarrow B) \rightarrow (C \vee D)) \text{ e } \phi[\theta/p] = ((\neg A \vee B) \rightarrow (C \vee D)).$$

Teorema: Rimpiazzamento

Siano $\phi[p]$, ψ e θ proposizioni e sia I_V una valutazione booleana. Se $I_V(\psi) = I_V(\theta)$, allora

$$I_V(\phi[\psi/p]) = I_V(\phi[\theta/p]).$$

Sistema assiomatico di Hilbert

Definizione: Calcolo proposizionale

Siano A , B e C tre simboli proposizionali; α e β due proposizioni. Il *calcolo proposizionale* è definito dai seguenti **schemi di assiomi** e dalle seguenti **regole di inferenza**:

Sistema assiomatico di Hilbert

Definizione: Calcolo proposizionale

Siano A , B e C tre simboli proposizionali; α e β due proposizioni. Il *calcolo proposizionale* è definito dai seguenti **schemi di assiomi** e dalle seguenti **regole di inferenza**:

1. Schemi di assiomi:

(a) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

(b) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

(c) $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$

Sistema assiomatico di Hilbert

Definizione: Calcolo proposizionale

Siano A , B e C tre simboli proposizionali; α e β due proposizioni. Il *calcolo proposizionale* è definito dai seguenti **schemi di assiomi** e dalle seguenti **regole di inferenza**:

1. Schemi di assiomi:

(a) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

(b) $((A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)))$

(c) $((\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B))$

2. Regole di inferenza:

(MP) Modus Ponens

$$\frac{\alpha, \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

(SU) Sostituzione Uniforme

$$\frac{\phi[p]}{\phi[\psi/p]}$$

dove p è un simbolo proposizionale che può occorrere in ϕ ; ψ è una proposizione e p non occorre in ψ ; $\phi[\psi/p]$ è detta *istanza* di $\phi[p]$.

Sistema assiomatico di Hilbert

Chiamiamo **teoria** della logica proposizionale un insieme di proposizioni Γ .

Sistema assiomatico di Hilbert

Chiamiamo **teoria** della logica proposizionale un insieme di proposizioni Γ .

Definizione: Dimostrazione e Teorema

Diciamo che una sequenza di proposizioni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è una **dimostrazione** della proposizione α in una teoria Γ , se $\alpha_n = \alpha$ e se per ogni $i = 1, \dots, n$:

- α_i è una istanza di uno schema di assiomi (ovvero è ottenuta da (a), (b) e (c) per mezzo di SU); oppure
- α_i è ottenuta da α_j ed α_k con $j < k < i$ per MP, dove $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$; oppure
- α_i è in Γ

Sistema assiomatico di Hilbert

Chiamiamo **teoria** della logica proposizionale un insieme di proposizioni Γ .

Definizione: Dimostrazione e Teorema

Diciamo che una sequenza di proposizioni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è una **dimostrazione** della proposizione α in una teoria Γ , se $\alpha_n = \alpha$ e se per ogni $i = 1, \dots, n$:

- α_i è una istanza di uno schema di assiomi (ovvero è ottenuta da (a), (b) e (c) per mezzo di SU); oppure
- α_i è ottenuta da α_j ed α_k con $j < k < i$ per MP, dove $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$; oppure
- α_i è in Γ

In tal caso diremo che α è un **teorema** della teoria Γ e scriveremo

$$\Gamma \vdash_H \alpha \quad (\text{leggi: "da } \Gamma \text{ si deriva } \alpha")$$

Sistema assiomatico di Hilbert

Chiamiamo **teoria** della logica proposizionale un insieme di proposizioni Γ .

Definizione: Dimostrazione e Teorema

Diciamo che una sequenza di proposizioni $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è una **dimostrazione** della proposizione α in una teoria Γ , se $\alpha_n = \alpha$ e se per ogni $i = 1, \dots, n$:

- α_i è una istanza di uno schema di assiomi (ovvero è ottenuta da (a), (b) e (c) per mezzo di SU); oppure
- α_i è ottenuta da α_j ed α_k con $j < k < i$ per MP, dove $\alpha_k = \alpha_j \rightarrow \alpha_i$; oppure
- α_i è in Γ

In tal caso diremo che α è un **teorema** della teoria Γ e scriveremo

$$\Gamma \vdash_H \alpha \quad (\text{leggi: "da } \Gamma \text{ si deriva } \alpha")$$

Se Γ è vuoto, diremo che α è un **teorema** del calcolo proposizionale e scriveremo

$$\vdash_H \alpha \quad (\text{leggi: "si dimostra } \alpha")$$

Sistema assiomatico di Hilbert

Esercizio

Dare una *dimostrazione* che $\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha.$$

Sistema assiomatico di Hilbert

Esercizio

Dare una *dimostrazione* che $\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$

schema (a)

(SU: $A \mapsto \alpha$ e $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$)

Sistema assiomatico di Hilbert

Esercizio

Dare una *dimostrazione* che $\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha.$$

- $\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \alpha$ e $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$)
- $(\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ schema (b)
(SU: $A \mapsto \alpha$, $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$ e $C \mapsto \alpha$)

Sistema assiomatico di Hilbert

Esercizio

Dare una *dimostrazione* che $\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \alpha$ e $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$)
2. $(\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ schema (b)
(SU: $A \mapsto \alpha$, $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$ e $C \mapsto \alpha$)
3. $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ 1 e 2 per MP

Sistema assiomatico di Hilbert

Esercizio

Dare una *dimostrazione* che $\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha.$$

- $\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \alpha$ e $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$)
- $(\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ schema (b)
(SU: $A \mapsto \alpha$, $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$ e $C \mapsto \alpha$)
- $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ 1 e 2 per MP
- $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \alpha$ e $B \mapsto \beta$)

Sistema assiomatico di Hilbert

Esercizio

Dare una *dimostrazione* che $\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \alpha \rightarrow \alpha.$$

- $\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \alpha$ e $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$)
- $(\alpha \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ schema (b)
(SU: $A \mapsto \alpha$, $B \mapsto (\beta \rightarrow \alpha)$ e $C \mapsto \alpha$)
- $((\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha))$ 1 e 2 per MP
- $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \alpha$ e $B \mapsto \beta$)
- $\alpha \rightarrow \alpha$ 3 e 4 per MP

Teorema di Deduzione

Teorema di Deduzione

Sia Γ una teoria e siano α e β due proposizioni, allora

$$\Gamma, \beta \vdash \alpha \text{ se e solo se } \Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$$

Teorema di Deduzione

Teorema di Deduzione

Sia Γ una teoria e siano α e β due proposizioni, allora

$$\Gamma, \beta \vdash \alpha \text{ se e solo se } \Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha$$

Dimostrazione (\Rightarrow)

- Sia $\alpha_1, \dots, \alpha_n = \alpha$ una dimostrazione di α da $\Gamma \cup \{\beta\}$. Procediamo per induzione completa.
- **(Passo base)**
 - α_1 è un assioma, oppure sta in Γ , oppure è β .
 - Per lo schema (a) abbiamo $\alpha_1 \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha_1)$
 - Dunque se α_1 è in Γ o è un assioma, abbiamo per MP che $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_1$.
 - Se $\alpha_1 = \beta$, siccome $\beta \rightarrow \beta$ è un teorema (vedi esercizio), abbiamo $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \beta$.

Teorema di Deduzione

Dimostrazione (\Rightarrow)

• (Passo induttivo)

- Supponiamo che $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_i$ con $i < n$. Consideriamo α_n .
- Come sopra: se α_n è un assioma, oppure sta in Γ , oppure è β , abbiamo $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_n$.
- Supponiamo allora che α_n sia stato ottenuto per MP.
- Dunque è stato ottenuto da due formule α_j e α_k con $j, k < n$.
- Per ipotesi induttiva, $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_j$ e $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_k$.
- Ma α_k deve essere della forma $\alpha_j \rightarrow \alpha_n$,
- dunque abbiamo $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_j$ e $\Gamma \vdash \beta \rightarrow (\alpha_j \rightarrow \alpha_n)$.
- Per lo schema di assioma (b) abbiamo che $((\beta \rightarrow (\alpha_j \rightarrow \alpha_n)) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha_j) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha_n)))$.
- Da questa formula e da $\beta \rightarrow \alpha_j$ e $\beta \rightarrow (\alpha_j \rightarrow \alpha_n)$, applicando due volte MP, si avrà $\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha_n$.

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\neg\neg\alpha$

ipotesi

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\neg\neg\alpha$

ipotesi

2. $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$

schema (a)

(SU: $A \mapsto \neg\neg\alpha$ e $B \mapsto \neg\alpha$)

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\neg\neg\alpha$ ipotesi
2. $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ schema (a)
- (SU: $A \mapsto \neg\neg\alpha$ e $B \mapsto \neg\alpha$)
 3. $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ 1 e 2 per MP

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\neg\neg\alpha$ ipotesi
2. $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \neg\neg\alpha$ e $B \mapsto \neg\alpha$)
3. $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ 1 e 2 per MP
4. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha)$ schema (c)
(SU: $A \mapsto \neg\alpha$ e $B \mapsto \alpha$)

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

- | | |
|---|--|
| 1. $\neg\neg\alpha$ | ipotesi |
| 2. $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ | schema (a)
(SU: $A \mapsto \neg\neg\alpha$ e $B \mapsto \neg\alpha$) |
| 3. $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ | 1 e 2 per MP |
| 4. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha)$ | schema (c)
(SU: $A \mapsto \neg\alpha$ e $B \mapsto \alpha$) |
| 5. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha$ | 3 e 4 per MP |

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\neg\neg\alpha$ ipotesi
2. $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \neg\neg\alpha$ e $B \mapsto \neg\alpha$)
3. $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ 1 e 2 per MP
4. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha)$ schema (c)
(SU: $A \mapsto \neg\alpha$ e $B \mapsto \alpha$)
5. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha$ 3 e 4 per MP
6. $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ esercizio

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

- | | | |
|----|--|--|
| 1. | $\neg\neg\alpha$ | ipotesi |
| 2. | $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ | schema (a) |
| | | (SU: $A \mapsto \neg\neg\alpha$ e $B \mapsto \neg\alpha$) |
| 3. | $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ | 1 e 2 per MP |
| 4. | $(\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha)$ | schema (c) |
| | | (SU: $A \mapsto \neg\alpha$ e $B \mapsto \alpha$) |
| 5. | $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha$ | 3 e 4 per MP |
| 6. | $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ | esercizio |
| 7. | α | 5 e 6 per MP |

Teorema di Deduzione

Esercizio

Dimostrare che $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ è un *teorema* del calcolo proposizionale, ovvero

$$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha.$$

1. $\neg\neg\alpha$ ipotesi
2. $\neg\neg\alpha \rightarrow (\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha)$ schema (a)
(SU: $A \mapsto \neg\neg\alpha$ e $B \mapsto \neg\alpha$)
3. $\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$ 1 e 2 per MP
4. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha)$ schema (c)
(SU: $A \mapsto \neg\alpha$ e $B \mapsto \alpha$)
5. $(\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \alpha$ 3 e 4 per MP
6. $\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$ esercizio
7. α 5 e 6 per MP

Ovvero, abbiamo dimostrato che $\neg\neg\alpha \vdash \alpha$.

Dal *teorema di deduzione*, segue che $\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$.

Teorie coerenti e Teorie complete

Definizione: teoria **consistente** o **coerente**

Diciamo che una teoria Γ è *consistente* (o *coerente*) se non esiste una proposizione α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Teorie coerenti e Teorie complete

Definizione: teoria **consistente** o **coerente**

Diciamo che una teoria Γ è *consistente* (o *coerente*) se non esiste una proposizione α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Una teoria Γ è detta **incoerente** se non è coerente, ovvero se esiste una formula α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Teorie coerenti e Teorie complete

Definizione: teoria **consistente** o **coerente**

Diciamo che una teoria Γ è *consistente* (o *coerente*) se non esiste una proposizione α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Una teoria Γ è detta **incoerente** se non è coerente, ovvero se esiste una formula α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.
- Proposizione: Γ è incoerente sse $\Gamma \vdash \alpha$ per ogni proposizione α .

Teorie coerenti e Teorie complete

Definizione: teoria **consistente** o **coerente**

Diciamo che una teoria Γ è *consistente* (o *coerente*) se non esiste una proposizione α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Una teoria Γ è detta **incoerente** se non è coerente, ovvero se esiste una formula α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.
- Proposizione: Γ è incoerente sse $\Gamma \vdash \alpha$ per ogni proposizione α .
- Proposizione: $\Gamma \vdash \alpha$ sse $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è incoerente.

Teorie coerenti e Teorie complete

Definizione: teoria **consistente** o **coerente**

Diciamo che una teoria Γ è *consistente* (o *coerente*) se non esiste una proposizione α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Una teoria Γ è detta **incoerente** se non è coerente, ovvero se esiste una formula α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.
- Proposizione: Γ è incoerente sse $\Gamma \vdash \alpha$ per ogni proposizione α .
- Proposizione: $\Gamma \vdash \alpha$ sse $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è incoerente.

Definizione: teoria (sintatticamente) **completa**

Diciamo che una teoria Γ è *completa* se per ogni proposizione α si verifica una e una sola delle seguenti relazioni $\Gamma \vdash \alpha$ oppure $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

Teorie coerenti e Teorie complete

Definizione: teoria **consistente** o **coerente**

Diciamo che una teoria Γ è *consistente* (o *coerente*) se non esiste una proposizione α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Una teoria Γ è detta **incoerente** se non è coerente, ovvero se esiste una formula α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.
- Proposizione: Γ è incoerente sse $\Gamma \vdash \alpha$ per ogni proposizione α .
- Proposizione: $\Gamma \vdash \alpha$ sse $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è incoerente.

Definizione: teoria (sintatticamente) **completa**

Diciamo che una teoria Γ è *completa* se per ogni proposizione α si verifica una e una sola delle seguenti relazioni $\Gamma \vdash \alpha$ oppure $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Osservazione: una teoria completa è anche una teoria coerente.

Teorie coerenti e Teorie complete

Definizione: teoria **consistente** o **coerente**

Diciamo che una teoria Γ è *consistente* (o *coerente*) se non esiste una proposizione α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Una teoria Γ è detta **incoerente** se non è coerente, ovvero se esiste una formula α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$.
- Proposizione: Γ è incoerente sse $\Gamma \vdash \alpha$ per ogni proposizione α .
- Proposizione: $\Gamma \vdash \alpha$ sse $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è incoerente.

Definizione: teoria (sintatticamente) **completa**

Diciamo che una teoria Γ è *completa* se per ogni proposizione α si verifica una e una sola delle seguenti relazioni $\Gamma \vdash \alpha$ oppure $\Gamma \vdash \neg\alpha$.

- Osservazione: una teoria completa è anche una teoria coerente.
- Se la teoria non è completa, allora esiste una proposizione α tale che non posso dimostrare né α né $\neg\alpha$. In tal caso α è detta **indecidibile**.

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Che relazione c'è tra teoremi e tautologie (proposizioni "vere")? Tra derivazione sintattica e semantica della logica proposizionale?

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Che relazione c'è tra teoremi e tautologie (proposizioni "vere")? Tra derivazione sintattica e semantica della logica proposizionale?

- Domanda: Tutto ciò che deriviamo mediante \vdash (senza premesse) coincide con le tautologie?

$\vdash \alpha$ se e solo se $\models \alpha$?

correttezza e completezza debole

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Che relazione c'è tra teoremi e tautologie (proposizioni "vere")? Tra derivazione sintattica e semantica della logica proposizionale?

- Domanda: Tutto ciò che deriviamo mediante \vdash (senza premesse) coincide con le tautologie?

$\vdash \alpha$ se e solo se $\models \alpha$?

correttezza e completezza debole

- Domanda: Che relazione c'è tra le proposizioni derivabili da una teoria Γ e le proposizioni implicate logicamente da Γ ?

$\Gamma \vdash \alpha$ se e solo se $\Gamma \models \alpha$?

correttezza e completezza forte

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Che relazione c'è tra teoremi e tautologie (proposizioni "vere")? Tra derivazione sintattica e semantica della logica proposizionale?

- Domanda: Tutto ciò che deriviamo mediante \vdash (senza premesse) coincide con le tautologie?

$\vdash \alpha$ se e solo se $\models \alpha$ correttezza e completezza debole

- Domanda: Che relazione c'è tra le proposizioni derivabili da una teoria Γ e le proposizioni implicate logicamente da Γ ?

$\Gamma \vdash \alpha$ se e solo se $\Gamma \models \alpha$ correttezza e completezza forte

- Osservazione: **Nelle logiche in cui vale un teorema di compattezza e di deduzione le due domande coincidono.**

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Che relazione c'è tra teoremi e tautologie (proposizioni "vere")? Tra derivazione sintattica e semantica della logica proposizionale?

- Domanda: Tutto ciò che deriviamo mediante \vdash (senza premesse) coincide con le tautologie?

$\vdash \alpha$ se e solo se $\models \alpha$ correttezza e completezza debole

- Domanda: Che relazione c'è tra le proposizioni derivabili da una teoria Γ e le proposizioni implicate logicamente da Γ ?

$\Gamma \vdash \alpha$ se e solo se $\Gamma \models \alpha$ correttezza e completezza forte

- Osservazione: **Nelle logiche in cui vale un teorema di compattezza e di deduzione le due domande coincidono.**
- **Correttezza:** **Tutti i teoremi** (proposizioni dimostrabili) **sono tautologie** (proposizioni "vere") ($\vdash \alpha$ implica $\models \alpha$).
- **Completezza** (semantica): **Tutte le tautologie** (proposizioni "vere") **sono teoremi** (proposizioni dimostrabili) ($\models \alpha$ implica $\vdash \alpha$).

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Teorema di Correttezza

Tutti i teoremi (proposizioni dimostrabili) **sono tautologie** (proposizioni "vere")
($\vdash \alpha$ implica $\models \alpha$).

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Teorema di Correttezza

Tutti i teoremi (proposizioni dimostrabili) **sono tautologie** (proposizioni "vere")
($\vdash \alpha$ implica $\models \alpha$).

Dimostrazione: Correttezza

- Basta dimostrare che
 1. Gli schemi di assiomi sono tautologie (facile verifica)
 2. Se α e $\alpha \rightarrow \beta$ sono tautologie, allora anche β è una tautologia (MP)
 3. Se $\phi[p]$ è una tautologia, anche $\phi[\psi/p]$ lo è (SU)

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Teorema di Correttezza

Tutti i teoremi (proposizioni dimostrabili) **sono tautologie** (proposizioni "vere")
($\vdash \alpha$ implica $\models \alpha$).

Dimostrazione: Correttezza

- Basta dimostrare che
 1. Gli schemi di assiomi sono tautologie (facile verifica)
 2. Se α e $\alpha \rightarrow \beta$ sono tautologie, allora anche β è una tautologia (MP)
 3. Se $\phi[p]$ è una tautologia, anche $\phi[\psi/p]$ lo è (SU)
- Per quanto riguarda 2.
 - Per assurdo: $\models \alpha$ e $\models \alpha \rightarrow \beta$, ma $\not\models \beta$.
 - Se $\not\models \beta$, esiste un \mathcal{M} che non soddisfa β : $\mathcal{M} \not\models \beta$
 - Poiché α è una tautologia: $\mathcal{M} \models \alpha$
 - Dunque, per definizione di implicazione logica, $\not\models \alpha \rightarrow \beta$
(contraddizione)

Completezza e correttezza del sistema hilbertiano

Teorema di Correttezza

Tutti i teoremi (proposizioni dimostrabili) **sono tautologie** (proposizioni "vere")
($\vdash \alpha$ implica $\models \alpha$).

Dimostrazione: Correttezza

- Basta dimostrare che
 1. Gli schemi di assiomi sono tautologie (facile verifica)
 2. Se α e $\alpha \rightarrow \beta$ sono tautologie, allora anche β è una tautologia (MP)
 3. Se $\phi[p]$ è una tautologia, anche $\phi[\psi/p]$ lo è (SU)
- Per quanto riguarda 3.
 - Sia $\phi[p]$ una tautologia. Allora $\models \phi[p]$ per qualunque assegnazione agli atomi di $\phi[p]$, in particolare a p .
 - Dunque, per qualsiasi proposizione ψ possiamo porre $I_V(p) = I_V(\psi)$.
 - Per il teorema di rimpiazzamento, $I_V(\phi[p/p]) = I_V(\phi[\psi/p])$.
 - Da cui segue che $\phi[\psi/p]$ è una tautologia.

Completezza semantica e sintattica

Teorema di **Completezza** (semantica) della logica proposizionale

Tutte le tautologie (proposizioni "vere") **sono teoremi** (proposizioni dimostrabili) ($\models \alpha$ implica $\vdash \alpha$).

- **La logica proposizionale è semanticamente completa:** tutte le tautologie sono teoremi
 - Banalmente la logica proposizionale *non è sintatticamente completa*.

Completezza semantica e sintattica

Teorema di **Completezza** (semantica) della logica proposizionale

Tutte le tautologie (proposizioni “vere”) **sono teoremi** (proposizioni dimostrabili) ($\models \alpha$ implica $\vdash \alpha$).

- **La logica proposizionale è semanticamente completa:** tutte le tautologie sono teoremi
 - Banalmente la logica proposizionale *non è sintatticamente completa*.
- **La logica dei predicati (logica del primo ordine) è semanticamente completa:** tutte le formule valide sono teoremi
 - **Teorema di completezza di Gödel, 1929**
 - Banalmente la logica dei predicati *non è sintatticamente completa*.

Completezza semantica e sintattica

Teorema di **Completezza** (semantica) della logica proposizionale

Tutte le tautologie (proposizioni "vere") **sono teoremi** (proposizioni dimostrabili) ($\models \alpha$ implica $\vdash \alpha$).

- **La logica proposizionale è semanticamente completa:** tutte le tautologie sono teoremi
 - Banalmente la logica proposizionale *non è sintatticamente completa*.
- **La logica dei predicati (logica del primo ordine) è semanticamente completa:** tutte le formule valide sono teoremi
 - **Teorema di completezza di Gödel, 1929**
 - Banalmente la logica dei predicati *non è sintatticamente completa*.
- Completezza sintattica \Rightarrow Completezza semantica
- Incompletezza semantica \Rightarrow Incompletezza sintattica

Teoremi di incompletezza di Gödel

Teoremi di incompletezza di Gödel

Primo teorema di incompletezza di Gödel, 1931

In ogni teoria matematica \mathcal{T} contenente l'aritmetica, se \mathcal{T} è coerente, allora \mathcal{T} è **sintatticamente incompleta** (ovvero, **esistono enunciati indecidibili**).

Teoremi di incompletezza di Gödel

Primo teorema di incompletezza di Gödel, 1931

In ogni teoria matematica \mathcal{T} contenente l'aritmetica, se \mathcal{T} è coerente, allora \mathcal{T} è **sintatticamente incompleta** (ovvero, **esistono enunciati indecidibili**).

Secondo teorema di incompletezza di Gödel, 1931

In ogni teoria matematica \mathcal{T} contenente l'aritmetica, se \mathcal{T} è coerente, allora **non è possibile provare la coerenza di \mathcal{T} all'interno di \mathcal{T}** .